

Tomasz Howiacki<sup>1</sup>

## **Teoretyczna oraz eksperymentalna analiza modalna sprężonej konstrukcji kładki o. Bernatka w Krakowie**

### **Streszczenie:**

*Przedmiotem niniejszego artykułu jest teoretyczna oraz eksperymentalna analiza modalna Kładki o. Bernatka w Krakowie. Zaprezentowano numeryczny model konstrukcji, wykonany w programie SOFiSTiK, a uzyskane w ramach obliczeń teoretycznych wyniki odniesiono do pomiarów dynamicznych, przeprowadzonych na istniejącym obiekcie. W badaniach wykorzystano zestaw wysokiej jakości akcelerometrów piezoelektrycznych, które umożliwiły rejestrację przebiegów czasowych drgań w wybranych punktach konstrukcji. Przebiegi te stanowiły odpowiedź kładki na przykładane doń obciążenia w postaci zsynchronizowanych przemarszów, przebiegów lub podskoków, generowanych przez grupę kilkudziesięciu osób. Współcześnie wykorzystanie zalet modeli teoretycznych i badań w warunkach in situ jest najbardziej właściwym podejściem w analizie zagadnień dynamiki budowli.*

**Słowa kluczowe:** kładka pieszo-rowerowa, dynamika, akcelerometry, pomiary

## **Theoretical and experimental modal analysis for prestressed structure of Father Bernatek Footbridge in Cracow**

### **Abstract:**

*The article presents a theoretical and experimental modal analysis for Father Bernatek Footbridge in Cracow. The numerical model of the structure, performed in the SOFiSTiK software was presented and obtained through theoretical calculation results were compared to dynamic measurements carried out on an existing object. During experiment, a set of high-quality piezoelectric accelerometers, which enabled registration of vibration time-waveforms at selected points of the structure, were applied. These waveforms were the answer of footbridge to applied load in the form of synchronized marches, runs, or jumps, generated by a group of several dozen people. Today, the advantages of the use of theoretical models and in situ measurements is the most appropriate approach in the dynamic analysis within the engineering structures.*

---

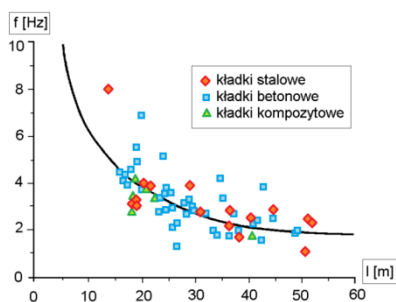
<sup>1</sup> Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

---

## 1. Wprowadzenie

Współcześnie wznoszone kładki dla pieszych charakteryzują się dużymi smukłościami, a architekci prześcigają się w tworzeniu coraz bardziej wymyślnych i nietypowych form budowlanych. Duże rozpiętości (Rys. 1), stosunkowo nieduża masa, małe wartości tłumienia konstrukcyjnego oraz działające w sposób dynamiczny obciążenia (przejścia tłumu pieszych, przejazdu rowerami, oddziaływania wiatru) sprawiają, że konieczne staje się przeprowadzanie modalnej analizy konstrukcji. Obejmuje ona m.in. wyznaczenie częstotliwości i odpowiadających im postaci drgań własnych, a także wartości tłumienia. Współcześnie w dynamice budowli wykorzystuje się podejście integrujące zalety modelu teoretycznego, najczęściej tworzonego przy użyciu zaawansowanych programów opartych o metodę elementów skończonych, oraz badań wykonywanych in situ. Wyniki pomiarów przyspieszeń drgań, w warunkach eksperymentalnych lub operacyjnych, mogą być podstawą do kalibracji modelu, weryfikacji poprawności stosowanych procedur i przyjętych na etapie projektowania założeń upraszczających. W obliczeniach nie jest możliwe uwzględnienie całej złożoności materii i zjawisk oraz wszystkich czynników, które wpływają na rzeczywistą pracę obiektu.

Znajomość charakterystyk dynamicznych konstrukcji jest istotna przy określaniu szeroko rozumianych stanów granicznych, m.in. komfortu wibracyjnego, wzbudzenia rezonansowego, odkształceń czy nośności [1].

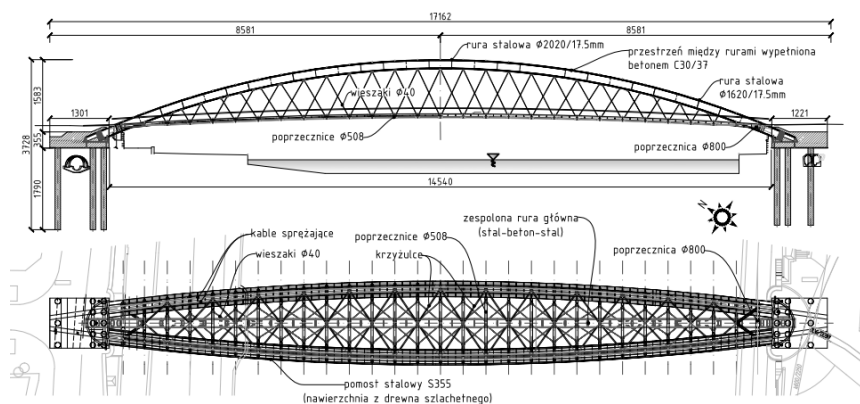


Rys. 1. Częstotliwość drgań własnych kładek w zależności od ich rozpiętości i konstrukcji [2]

## 2. Opis konstrukcji

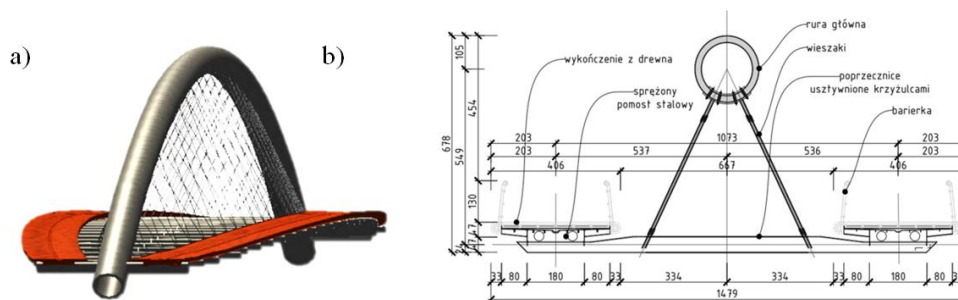
Będąca przedmiotem niniejszego opracowania Kładka o. Bernatka w Krakowie to ciekawy architektonicznie, ale także pod względem konstrukcyjnym obiekt. Stanowi ona przeprawę pieszo-rowerową przez Wisłę (prostopadłą do kierunku przeszkody), łączącą Kazimierz z Podgórzem. Pomosty, których rozpiętość w świetle podpór

wynosi ok. 145 m zostały sztywno zamocowane w żelbetowym fundamencie (Rys. 4). Głównym ustrój nośny stanowi rura stalowo-betonowa o zewnętrznej średnicy równej 1010 mm. Składa się ona z trzech współosiowych przekrojów rurowych: wewnętrznego stalowego, środkowego betonowego i zewnętrznego stalowego. Łukowe ukształtowanie elementu sprawia, że pracuje on przede wszystkim na ściskanie. Konstrukcję wsporczą dla pomostów stanowią stalowe poprzecznice rurowe, usztywnione dodatkowo w płaszczyźnie poziomej krzyżulcami. Poprzecznice połączone są z rurą główną za pomocą wiotkich wieszaków o średnicy 40 mm.



Rys. 2. Ogólne gabaryty kładki o. Bernatka w Krakowie na podstawie

Pomosty wykonano jako cienkościennie przekroje stalowe, zakrzywione w obu płaszczyznach – co daje wrażenie lekkości i dynamiki. Ponadto zostały one sprężone, co nie jest powszechną praktyką w przypadku elementów stalowych. Naciągnięte kable sprężające o przeciwnych krzywiznach skutecznie ograniczają swobodę przemieszczeń pomostów i oprócz funkcji przyjmowania siły rozporu, stanowią także dodatkowe zabezpieczenie pomostów przed niepożądaną niestatecznością skrętną i drganiami.



Rys. 3. Kładka o. Bernatka w Krakowie: a) wizualizacja; b) przekrój poprzeczny



**Rys. 4.** Utwierdzenie rury głównej i pomostów w fundamencie oraz widok połączenia wieszaków z rurą główną oraz poprzecznicami

### 3. Model numeryczny

Istotnym aspektem przy projektowaniu kładek są ich drgania, które mogą wywoływać dyskomfort w trakcie użytkowania. Usuwanie takich problemów na istniejącej już konstrukcji (np. poprzez zastosowanie tłumików drgań) jest bardzo kosztowne, czego przykładem może być Millenium Bridge w Londynie [6]. Dlatego tak ważna jest szczegółowa analiza konstrukcji na etapie projektowania. Analizę dynamiczną kładki o. Bernatka przeprowadzono w programie SOFiSTiK. Wyznaczono teoretyczne postaci i odpowiadające im częstotliwości drgań własnych. Prętowy model konstrukcji zrealizowano metodą elementów skończonych, wykorzystując w tym celu elementy następujących typów:

- belkowe (beam) – dla rury głównej, pomostów, poprzecznic i krzyżulców;
- ciągnowe (cable) – dla smukłych wieszaków.

Do modelu przyjęto następujące materiały:

- beton klasy C30/37 – właściwości zgodnie z [4];
- stal konstrukcyjna S355 – właściwości zgodnie z [5].

Przyjęto siatkę elementów skończonych wygenerowanych automatycznie przez program, przy uwzględnieniu maksymalnego wymiaru oczka równego 30 cm. Wykonano także analizę zbieżności pozwalającą stwierdzić, że przyjęte siatkowanie będzie dawało poprawne wyniki. Końcowy model składał się z 7953 węzłów oraz 7840 prętowych elementów skończonych. Ciężar własny układu konstrukcyjnego uwzględniono w sposób automatyczny w programie. Dodatkowo, obciążenie stałe niekonstrukcyjne (wykładzina drewniana oraz stalowe barierki) rozłożono w modelu

na masy skupione, uwzględnione w analizie dynamicznej Zamocowanie rury głównej oraz pomostów po obu stronach przyjęto jako całkowite utwierdzenie. W modelu nie uwzględniono wpływu sprężenia.

Zespolony przekrój (stal-beton-stal) rury głównej sprowadzono do przekroju betonowego o zastępczym module sprężystości, którego wartość w stosunku do wartości pierwotnej (przekrój betonowy bez uwzględnienia stali) wzrosła o  $\alpha = 86\%$ .

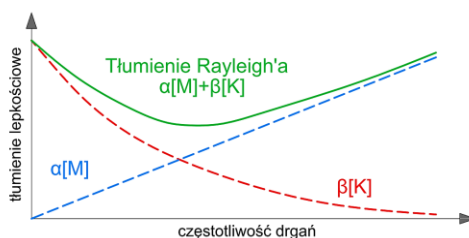
$$I_{cs} = \alpha \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \rightarrow \alpha = 1,86 \quad (1)$$

gdzie  $I_{cs}$  – rzeczywista sztywność przekroju zespolonego,  $D$  – zewnętrzna średnica rury,  $d$  – wewnętrzna średnica rury. Ostatecznie wartość modułu sprężystości, przyjętą w modelu numerycznym, ustalono na poziomie 36 GPa.

W modelu przyjęto tłumienie sztywnościowo-bezwładnościowe, które zakłada, że macierz tłumienia  $[C]$  stanowi liniową kombinację macierzy sztywności  $[K]$  oraz bezwładności  $[M]$ , zgodnie z równaniem:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

w którym  $\alpha$  i  $\beta$  to współczynniki tłumienia Rayleigha. W praktyce wartości współczynników można określić wyznaczając doświadczalnie logarytmiczny dekrement tłumienia dla dwóch różnych częstotliwości drgań własnych [7]. Nie ma jednak wystarczająco pełnych opracowań, z których można skorzystać na etapie projektowania.

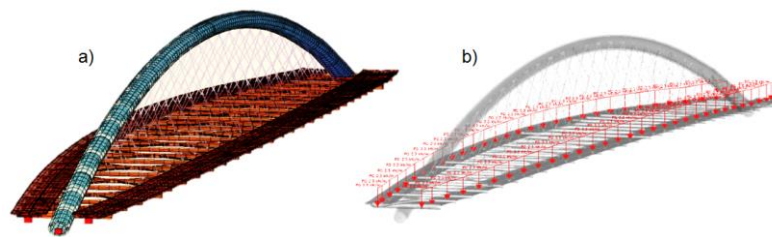


Rys. 5. Model sztywnościowo-bezwładnościowy tłumienia drgań

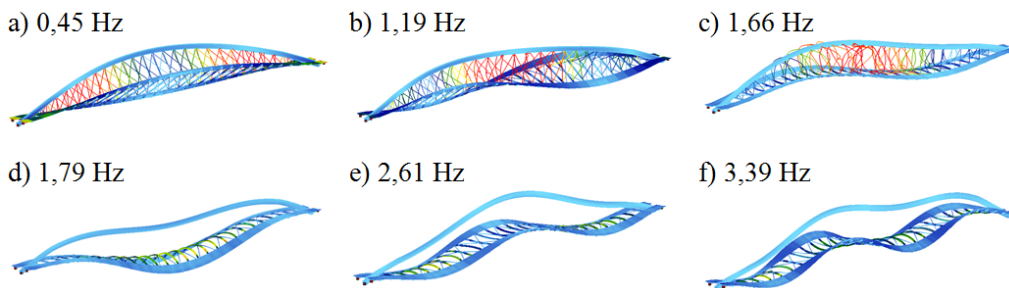
Wartości współczynników kombinacji dla zakresu częstotliwości od 0,4 do 4 [Hz] i założonego tłumienia równego 3% odczytano bezpośrednio z programu na poziomie  $\alpha=0,137088$  oraz  $\beta=0,00289373$ . Wpisują się one w przedziały wartości zaproponowane w [7] dla konstrukcji stalowych, co może świadczyć o poprawności

wykonanego modelu. Należy jednak pamiętać, że w przytoczonym opracowaniu uwzględniono przede wszystkim różnego rodzaju budynki. Dla kładek i mostów konieczne będzie w przyszłości wykonanie podobnych zestawień.

Model sztywnościowo – bezwładnościowy uwzględnia zmianę właściwości tłumiących budowli w funkcji częstotliwości drgań, przez co lepiej można odwzorować sytuacje mające miejsce w rzeczywistości. Poniżej zaprezentowano wyniki pozostałych obliczeń, tj. postaci drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości drgań wyrażone w  $Hz$ . W zestawieniu pominięto częstotliwości odpowiadające drganiom wyłącznie samych wieszaków (bez wyraźnych drgań pozostałej części konstrukcji).



Rys. 6. a) Model numeryczny; b) schemat obciążenia stałego niekonstrukcyjnego [SOFiSTiK]



Rys. 7. Postacie i częstotliwości drgań własnych kładki wyznaczone teoretycznie [SOFiSTiK]

Wyznaczone wartości częstotliwości drgań własnych (mniejsze od  $4 Hz$ ) sugerują, że kładka może być podatna na oddziaływanie pieszych, którzy najczęściej poruszają się właśnie w tym zakresie częstotliwości. Wstępna analiza wskazuje na występowanie ryzyka wzbudzenia rezonansowego pionowych drgań pomostów z częstotliwościami odpowiadającymi trzeciej i czwartej postaci drgań własnych. Częstotliwości odpowiadające tym postaciom mieszczą się w przedziale częstotliwości oddziaływań pieszych. Postacie te mają prostą formę (z małą liczbą ekstremów), dlatego uznać je można za łatwe do wzbudzenia przez użytkowników. Typowy zakres oddziaływań dynamicznych pieszych mieści się w przedziale  $1,8 \div 2,8 Hz$  dla oddziaływań pionowych oraz  $0,9 \div 1,2 Hz$  dla oddziaływań poziomych.

---

Pierwsza postać odpowiadająca drganiom poprzeczno-skrętnym jest potencjalnie groźna z punktu widzenia komfortu użytkownika (duża wrażliwość pieszych na drgania poprzeczne), ale nie będzie wzbudzana przez pieszych. Wzbudzanie wyższych postaci drgań kładki podczas jej użytkowania, choć możliwe, będzie utrudnione z powodu złożonych form giętnych tych postaci.

## 4. Pomiary dynamiczne

### 4.1. Przebieg badań

W eksperymencie uczestniczyli uczniowie szkół ponadgimnazjalnych z województwa małopolskiego oraz studenci kół naukowych Politechniki Krakowskiej. Badania przeprowadzono w dniu 26.06.2014 r., w czasie finału projektu popularyzatorsko-naukowego „Żywe Konstrukcje”, zorganizowanego w ramach przedsięwzięcia Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Ścieżki Kopernika”. Grupa kilkudziesięciu osób w sposób zsynchronizowany obciążała konstrukcję z częstotliwościami zbliżonymi do częstotliwości jej drgań własnych. Zrealizowano łącznie 24 schematy obciążenia w różnych konfiguracjach m.in. chód, chód w kółku, przemarsz, skoki i biegi.



Rys. 8. Zdjęcia z realizacji badań dynamicznych [fot. Jan Zych]

Do pomiaru odpowiedzi konstrukcji na przykładane do niej obciążenia dynamiczne wykorzystano akcelerometry piezoelektryczne, zapisujące sygnał z częstotliwością 4000 Hz. Zasada ich działania opiera się na generowaniu ładunku elektrycznego na powierzchni piezoelektryka pod wpływem działających naprężeń mechanicznych, przy czym wielkość ładunku jest do tych naprężeń proporcjonalna. W przypadku przyspieszeń, naprężenia generowane są dzięki przekazaniu na płytki piezoelektryczne siły bezwładności, która powstaje w trakcie przyspieszania określonej masy w czujniku. Zakres pomiarowy urządzeń wykorzystanych do pomiaru przyspieszeń drgań wyrażany jest w jednostkach przeciążenia  $g$ . Przeciążenie należy rozumieć jako wielokrotność przyspieszenia ziemskiego  $m/s^2$ . Ciało w polu grawitacyjnym znajduje się w stanie przeciążenia, jeśli wypadkowa działających na nie sił powoduje jego przyspieszenie.

---

W dynamice budowli ogólna zasada mówi, że przy częstotliwościach niskich należy mierzyć przemieszczenia (zazwyczaj występują wtedy duże amplitudy), natomiast przy częstotliwościach wysokich mierzy się przyspieszenia, które są proporcjonalne do kwadratu częstotliwości [12]. W prezentowanych przykładach zdecydowano się na pomiar przyspieszeń na kierunku pionowym, jednak dzięki komputerowemu całkowaniu otrzymano także przebiegi czasowe prędkości i przemieszczeń, co umożliwiło przeprowadzenie kompleksowej analizy spektralnej. Do opomiarowania wybrano sześć punktów, rozmieszczonych na obu pomostach w odległości 0,25 oraz 0,50 ich całkowitej długości, licząc od miejsca utwierdzenia. Takie podejście jest najbardziej celowe w ocenie wpływu drgań na budowlę, pozwala bowiem na uniknięcie dokładniejszej analizy typu i sposobu propagacji drgań, które superponują się, a ich wypadkowa ma zazwyczaj skomplikowany przebieg [13]. Czujniki zainstalowano tak, aby wiernie odzwierciedlały przemieszczenia konstrukcji bez wprowadzania dodatkowych zakłóceń (możliwie mała masa, maksymalnie duża sztywność), zgodnie ze wskazówkami przedstawionymi w [14].

#### 4.2. Przykładowe obliczenia inżynierskie

W celu zidentyfikowania częstotliwości drgań własnych konstrukcji na podstawie pomierzonych w funkcji czasu wartości przyspieszeń, należy sygnał wejściowy, na który składają się różne częstotliwości drgań, ale także zakłócenia i szumy – odpowiednio rozdzielić na poszczególne składowe. Odbywa się to zgodnie z teorią mówiącą, że każdy sygnał da się rozłożyć na składowe harmoniczne. Następnie składowe te przedstawia się na wykresie w funkcji częstotliwości, tworząc tzw. widmo lub spektrum częstotliwościowe. Dostarcza ono informacji na temat odpowiedzi konstrukcji na wymuszenia dynamiczne, tzn. pokazuje, dla których częstotliwości amplitudy drgań są największe. Analizę widmową (spektralną) można przeprowadzić dla różnych wielkości fizycznych, a w przypadku konstrukcji budowlanych najczęściej są to: przyspieszenie, prędkość i przemieszczenie – pomiędzy którymi występuje zależność różniczkowa.

Współcześnie w praktycznych zastosowaniach powszechnie wykorzystuje się do analizy widmowej szybką transformatę Fouriera FFT (ang. fast Fourier transform). Cyfrowy sygnał ma charakter dyskretny, tzn. pomiary wybranych wielkości fizycznych odbywają się cyklicznie, w zdefiniowanych odstępach czasu. Dlatego transformatę taką nazywa się często również dyskretną transformatą Fouriera DFT (ang. discrete Fourier transform):

$$x(k) = \sum_{j=1}^n x(j) \cdot \omega_n^{(j-1)(k-1)}, \quad \omega_n = e^{\frac{-2\pi i}{n}}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (3)$$



W analizie dynamicznej do określenia przyspieszeniowego spektrum odpowiedzi kładki wykorzystano właśnie procedurę zaproponowaną przez Fouriera. W efekcie zidentyfikowano częstotliwości drgań własnych konstrukcji dla poszczególnych schematów obciążenia. W poniższej tabeli zestawiono i porównano wartości częstotliwości uzyskanych na drodze teoretycznej (model numeryczny SOFiSTiK) z wartościami wyznaczonymi na podstawie badań in situ.

**Tablica 1.** Częstotliwości drgań własnych kładki wg analizy numerycznej i badań terowych

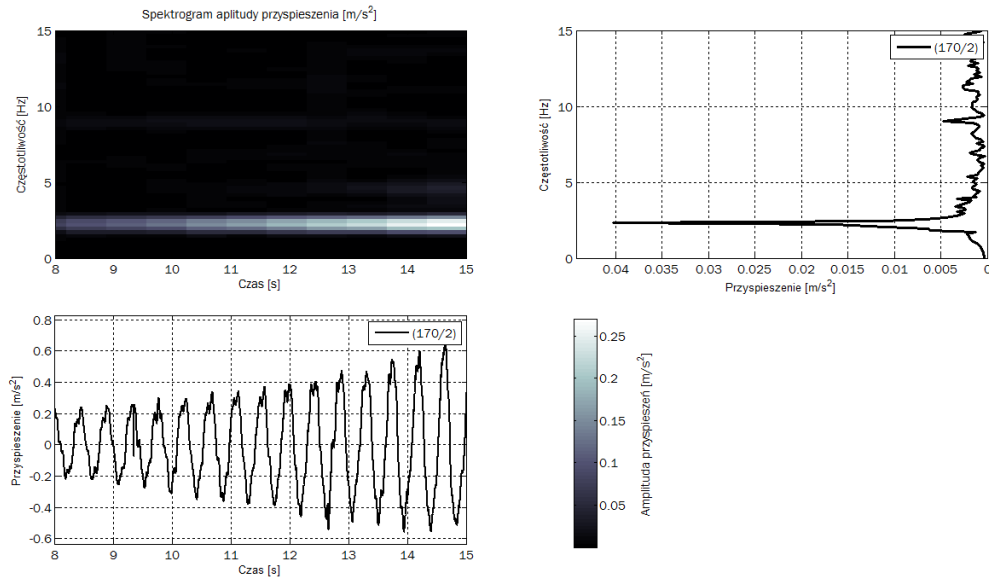
Postać drgań	Częstotliwość [Hz]		
	Model MES	Pomiary	Opis postaci
1	0,45	0,58	skrętna
2	1,66	1,54	giętna (pionowa)
3	1,19	1,72	skrętna
4	1,79	1,84	giętno-skrętna
5	2,61	2,25	giętna (pionowa)
6	3,39	3,47	giętna (pionowa)

Zbliżone wartości podstawowych częstotliwości drgań własnych zestawione w powyższej tabeli świadczą o tym, że konstrukcja pracuje zgodnie z założeniami. Przeprowadzona analiza wykazała dużą zgodność z innymi opracowaniami, np. [7, 8]. Na tej podstawie należy stwierdzić, że kładka o. Bernatka w Krakowie spełnia zarówno kryteria nośności, jak i kryteria komfortu. Dodatkowo warto podkreślić, że w normalnych warunkach eksploatacji wzbudzenie konstrukcji z częstotliwością drgań własnych jest bardzo trudne.

Porównując uzyskane wyniki, największe różnice pomiędzy obliczonymi i pomierzonymi częstotliwościami drgań własnych można zaobserwować w przypadku giętno-skrętnych postaci drgań (model MES: 0,45 Hz, 1,19 Hz, badania terenowe: 0,58 Hz, 1,72 Hz). Rozbieżności te świadczą mogą o dużym i korzystnym wpływie krzywoliniowych ściągnięć łuku na charakterystyki dynamiczne konstrukcji. Zagadnienie to warto podjąć w ramach kolejnych badań i analiz.

Wadą transformaty Fouriera jest utrata informacji o czasie przy przejściu do dziedziny częstotliwości. Problem ten w 1946 roku rozwiązał brytyjski fizyk Denis Gabor, który zaadaptował dotychczasową metodę do analizy krótkich segmentów sygnału za pomocą tzw. funkcji okna  $g(t)$ , która może być funkcją zmiennej rzeczywistej lub zespolonej [15]. W ogólności okienkowa transformata przekształca sygnał  $x(t)$  w dwuwymiarową funkcję czasu i częstotliwości. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga nie jest jednak możliwa precyzyjna lokalizacja sygnału jednocześnie w dziedzinie czasu i częstotliwości. Rozwiązanie zależy od przyjętej rozpiętości okna. Zwiększając tą rozpiętość uzyskujemy lepsze rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości kosztem dokładności w dziedzinie czasu – i odwrotnie.

Okienkowa transformata Fouriera dla zagadnień budowlanych jest jednak wystarczająco dobrym narzędziem, które czytelnie obrazuje zjawisko i ułatwia interpretację danych pomiarowych. Przykłady uzyskanych wyników przedstawiono poniżej.



**Rys. 9.** Przykładowy, zarejestrowany przebieg czasowy przyspieszeń drgań oraz wyznaczone dla niego widmo częstotliwościowe oraz spektrogram w dziedzinie czasu i częstotliwości

Wielkość tłumienia można scharakteryzować za pomocą parametru nazywanego logarytmicznym dekrementem tłumienia  $\delta$ , odczytując wartości  $n$ -tej amplitudy  $A_n$  oraz  $m$ -tej amplitudy  $A_m$  swobodnych drgań tłumionych i podstawiając do wzoru:

$$\delta = \frac{1}{m-n} \cdot \ln\left(\frac{A_n}{A_m}\right) \quad (4)$$

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia, wyznaczonego na podstawie zarejestrowanych przebiegów czasowych drgań, mieściły się w przedziale 2,3 – 3,3%.

## 5. Podsumowanie

Udoskonalenie procedur projektowania nowoczesnych kładek dla pieszych będzie przedmiotem dalszych badań, zwłaszcza w zakresie związanym z dynamiką

---

takich obiektów. Zrozumienie i zastosowanie nowych algorytmów w praktyce inżynierskiej to długotrwały proces, jednak współcześnie z pomocą przychodzą nam zaawansowane narzędzia komputerowe [9]. Zastosowanie programów opartych o metodę elementów skończonych pozwala na skrócenie czasu obliczeń oraz na szczegółową analizę pracy konstrukcji zarówno pod względem nośności, jak i użyteczności (np. poczucie komfortu).

W prezentowanym przykładzie rejestrowano przebiegi czasowe drgań w wybranych punktach konstrukcji, na podstawie których identyfikowano częstotliwości i postaci drgań własnych oraz wartości tłumienia. Takie podejście należy zakwalifikować jako zadanie diagnozy, w którym dany jest obiekt, rzeczywiste oddziaływania oraz przyjęte kryteria oceny, a efektem końcowym m.in. odpowiedź na pytanie, czy istnieje związek przyczynowo - skutkowy między stanem technicznym obiektu, a występującymi oddziaływaniami [11]. Wyniki modelu numerycznego stanowią w takim przypadku uzupełnienie informacji uzyskanych w warunkach in situ. Wykorzystanie połączenia zalet teorii oraz praktyki w rozwiązywaniu zagadnień dynamiki budowli jest obecnie rozwiązaniem najlepszym [10].

Przeprowadzone badania są przykładem eksperymentalnej analizy, umożliwiającej rejestrowanie przebiegów czasowych stanowiących odpowiedź na zaprojektowane wymuszenie, którego wystąpienie w rzeczywistych warunkach eksploatacji jest mało prawdopodobne. Metoda ta, choć w wielu przypadkach skuteczna, niesie ze sobą trudności związane m.in. z koniecznością wyłączenia obiektu z użytkowania na czas eksperymentu, czy też trudności z odpowiednim zaprojektowaniem wzbudzenia, zwłaszcza w przypadku konstrukcji masywnych lub wielkogabarytowych

Przeprowadzone badania pozwoliły na identyfikację podstawowych parametrów dynamicznych kładki. Wyniki wskazują, iż konstrukcja odznacza się dużą odpornością dynamiczną. Maksymalne wartości przyspieszeń drgań zarejestrowane podczas badań, rzędu  $1,90 - 2,40 \text{ m/s}^2$ , w świetle zaleceń [16], w przypadku bardzo rzadkiego występowania, uznać można za dopuszczalne. Poziome przyspieszenia drgań pomostu kładki uzyskane dla przypadków ruchu o charakterze codziennym (swobodne przejścia małych grup, swobodny bieg pojedynczych osób) oraz wzbudzenia rezonansowe realizowane przez dwie osoby, nie przekraczają wartości  $0,5 \text{ m/s}^2$ . W świetle zaleceń [16, 17] oznacza to, że podczas codziennej eksploatacji zachowany jest maksymalny komfort użytkowania konstrukcji.

## **Bibliografia**

1. Flaga A., Michałowski T., Charakterystyki dynamiczne kładek dla pieszych, *Konferencja Naukowa Zagadnienia Stanów Granicznych Konstrukcji Stalowych*,

- 
- 45÷52, Politechnika Krakowska, Kraków 2004.
2. Vibration problems in structures, practical guidelines, *Bulletin d'information No 209 CEB*, praca zbiorowa pod redakcją H. Bachmana, Lozanna 1991.
  3. Polski Komitet Normalizacyjny, *PN-EN 1992-1-1 Eurokod 2, Projektowanie konstrukcji z betonu, Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, Warszawa, Polska, 2008.
  4. Polski Komitet Normalizacyjny, *PN-EN 1993-1-1 Eurokod 3, Projektowanie konstrukcji stalowych, Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, Warszawa, Polska, 2006.
  5. Nepelski K., Lipecki T., Numeryczne modelowanie oddziaływań wandalistycznych na kładce pieszo-rowerowej, *Budownictwo i Architektura*, 8 (2011), s. 83-96.
  6. Kawecki J., Kowalska A., Tłumienie drgań w opisie sztywnościowo-bezwładnościowym, *Czasopismo techniczne*, 3-B/2010.
  7. Żółtowski K., Kozakiewicz A., Piotrowska K., Kładka pieszo-rowerowa Kazimierz-Podgórze w ciągu ul. Mostowej-Brodzińskiego w Krakowie, Analiza odpowiedzi dynamicznej pod obciążeniami pochodzącymi od pieszych, Gdańsk, 2009.
  8. Żółtowski K., Kozakiewicz A., Romaszekiewicz T., Raport z badań dynamicznych kładki przez rzekę Wisłę w Krakowie, Gdańsk, wrzesień 2010.
  9. Żółtowski K., Żółtowski P., Dynamic analysis of pedestrian Bridges with FEM and CFD, *Gdańsk University of Technology*, KBP Żółtowski (Consulting Engineers), Gdańsk.
  10. Wójcicki Z., Grosel J., Sawicki W., *Eksperymentalne badania dynamiczne budowli*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 2014.
  11. Kawecki J., Stypuła K., *Zapewnienie komfortu wibracyjnego ludziom w budynkach narażonych na oddziaływania komunikacyjne*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2013.
  12. Ciesielski R., Kawecki J., Maciąg E.: *Ocena wpływu wibracji na budowle i ludzi w budynkach (diagnostyka dynamiczna)*, Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa, 1993.
  13. Ciesielski R., *Ujęcie obliczeniowe oraz ocena wpływu drgań i wstrząsów pochodzących ze źródeł zewnętrznych na niektóre typy budowli*, Budownictwo Lądowe nr 4, Politechnika Krakowska, Zeszyt Naukowy nr 1, Kraków, 1961.
  14. Department of Environment and Conservation NSW, *Assesing Vibration: a technical guideline*, Sydney, February 2006.
  15. Rucka M., Wilde K., *Dynamika Budowli z przykładami w środowisku Matlab®*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2008.
  16. Footbridges – Assessment of vibrational behavior of footbridges under pedestrian loading. *Service d'études techniques des routes et autoroutes - Sétra*, 2006.
  17. International Organization for Standardization , *ISO 10137:2007: Base for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibration*, 2007.